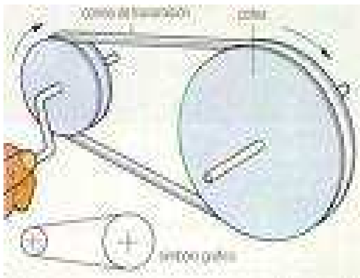
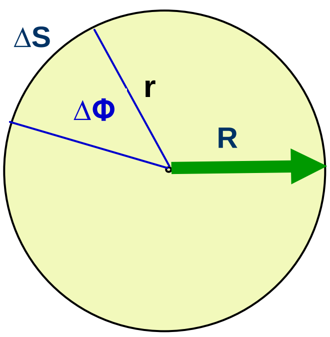
MOVIMIENTO CIRCULAR



Es un tipo de movimiento en el plano, en el cual la partícula gira a una distancia fija alrededor de un punto llamado centro. El movimiento circular puede ser de dos tipos:

- Movimiento circular uniforme
- Movimiento circular uniformemente variado.

CANTIDADES CINEMÁTICAS ANGULARES



Radio de giro (R): Es la distancia constante desde la partícula hasta el centro de giro.

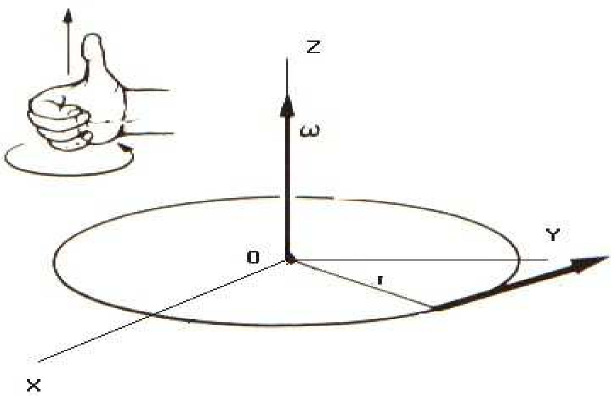
Vector posición (r) : Es el vector que ubica la partícula en cualquier punto de su trayectoria.

Desplazamiento angular (ΔΦ) : Es el cambio de posición angular de la partícula durante el movimiento. Se mide en radianes.

Longitud lineal (ΔS) : Es el cambio de posición lineal de la partícula durante el movimiento. Se mide en metros. El desplazamiento lineal se relaciona con el desplazamiento angular con la ecuación **$\Delta S = R\,\Delta\theta$**

Velocidad angular media: Mide el desplazamiento angular por unidad de tiempo. Se mide en rad/s. La velocidad angular se calcula con:

$$\omega_m = \Delta\Phi / \Delta t = \Phi_2 - \Phi_1 / t_2 - t_1$$



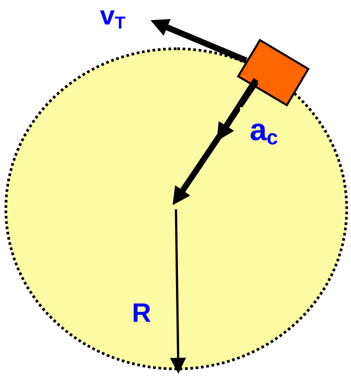
Velocidad tangencial media: Mide el desplazamiento por unidad de tiempo. Se mide en m/s. La velocidad se calcula con:

$$v_m = \Delta r / \Delta t = r_2 - r_1 / t_2 - t_1$$

El vector velocidad tangencial se puede expresar con la siguiente ecuación

$$v_T = w\,R\ (-\,\mathrm{Sen}\,\Phi\ i + \mathrm{Cos}\,\Phi\ j)$$

La velocidad lineal o tangencial se relaciona con la velocidad angular con la ecuación **$v = R\,\omega$**

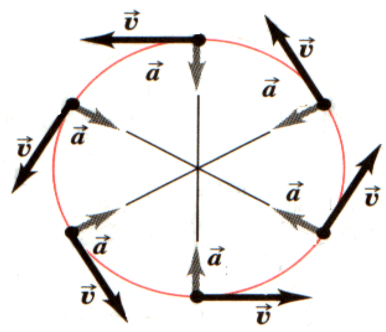


Aceleración centrípeta: Como puede observarse en la figura la velocidad cambia de dirección, debido a la aceleración **a_c**, La aceleración centrípeta es normal al vector velocidad y produce el cambio de dirección del vector velocidad

La magnitud de la aceleración centrípeta se calcula con: **v^2 / R** o **$\omega^2 R$**

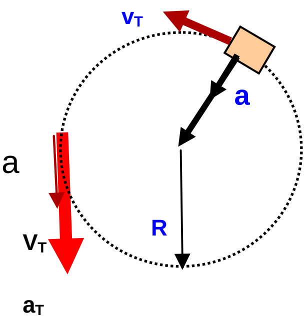
El vector aceleración centrípeta se puede expresar con la siguiente ecuación $\mathbf{a_C = w^2 R \; (- Cos\, \Phi\, i \; - \; Sen\, \Phi\, j)}$

La figura muestra las direcciones de la velocidad y aceleración en distintos puntos del movimiento circular uniforme de una partícula.



La velocidad tangencial instantánea se puede calcular tomando el límite a la velocidad angular media $v_T = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$

Aceleración tangencial: Se produce cuando varía la magnitud de la rapidez de la partícula. En el movimiento circular uniforme es de modulo constante.



La aceleración tangencial media es el cambio de magnitud de la velocidad tangencial por unidad de tiempo

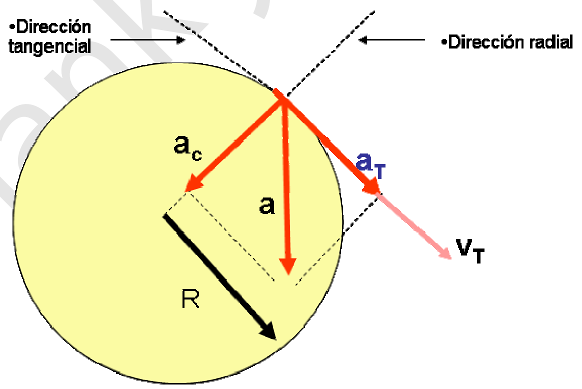
$$\mathbf{a_{Tm} = v_2 - v_1 / t_2 - t_1}$$

El vector aceleración tangencial se puede expresar con la siguiente ecuación

$$\mathbf{a_T = \alpha\, R \; (- Sen\, \Phi\, i \; + \; Cos\, \Phi\, j)}$$

La aceleración tangencial instantánea se puede calcular tomando el límite a la aceleración tangencial media $a_T = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{a_{T2} - a_{t1}}{t_2 - t_1}$

Vector aceleración

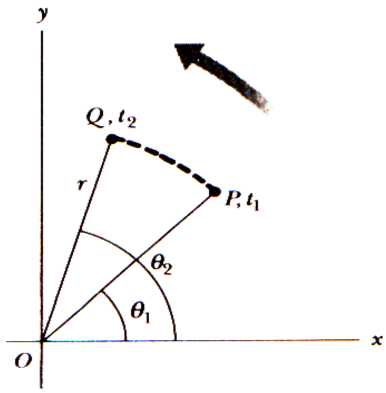


Las aceleraciones centrípeta y tangencial son componentes del vector aceleración
El vector aceleración se puede expresar con la ecuación

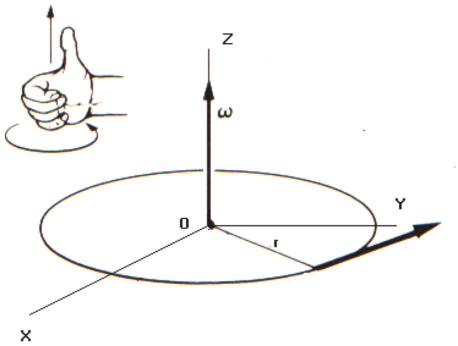
$$\mathbf{a^2 = a_T^{\,2} + a_C^{\,2}}$$

Velocidad angular y aceleración angular

Una partícula en movimiento circular de radio r, genera un arco s y un ángulo θ siendo $\Delta s = R\,\Delta\theta$. Otra manera de describir el movimiento circular es analizando las variables angulares: el desplazamiento angular $\Delta\theta$, la velocidad angular y la aceleración angular. En la figura se muestra el ángulo barrido $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$, en un intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$.



La velocidad angular **ω** es un vector perpendicular al plano del movimiento, representado en el eje del movimiento circular. Por convención el sentido de **ω** se determina por la regla de la mano derecha, los cuatro dedos siguen el sentido de giro de la partícula y el dedo pulgar indica el sentido de **ω.**



Si la velocidad angular instantánea de un móvil cambia de $\boldsymbol{\omega_1}$ a $\boldsymbol{\omega_2}$ en el intervalo de tiempo Δt, el móvil tiene una aceleración angular.

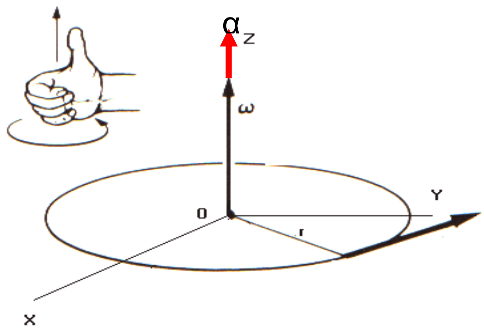
Aceleración angular (α): Mide el cambio de velocidad angular por unidad de tiempo en rad/s^2, puede ser media o instantánea. Es un vector colineal con el vector velocidad angular. En el movimiento circular uniformemente variado es constante

La aceleración angular media se puede calcular con la expresión

$$\boldsymbol{\alpha_m = \Delta\omega / \Delta t} \quad \text{en rad/s}^2$$

La aceleración angular instantánea se puede calcular tomando el límite a la aceleración angular media

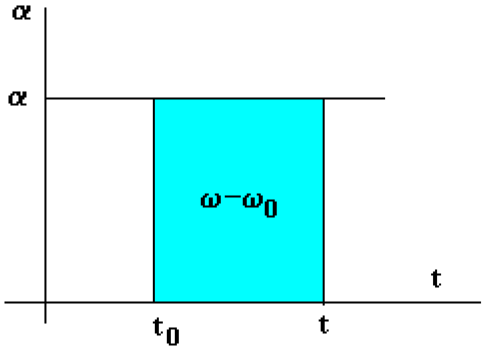
$$\alpha = \lim_{x \to \infty} \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1}$$



El modulo de la aceleración angular instantánea se puede calcular con la expresión :

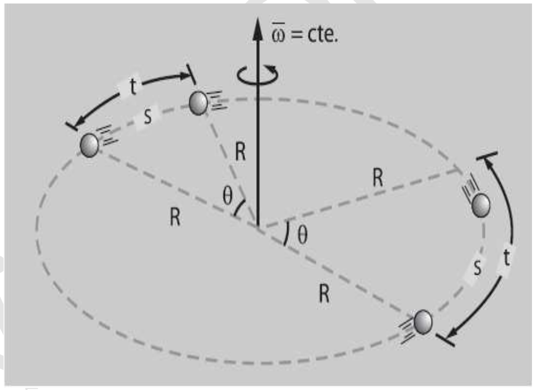
$$\alpha = a_T / R \text{ en rad/s}^2$$

La aceleración angular en el MCUV es constante y su grafica se representa en la figura

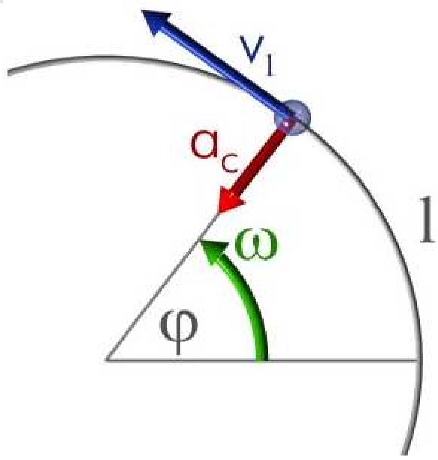


MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

La partícula recorre arcos iguales en tiempos iguales. Sus características son:



- La rapidez tangencial es constante
- La aceleración es perpendicular a la velocidad y su modulo es constante
- Las velocidades angulares media e instantánea son iguales
- La aceleración angular es cero
- La aceleración tangencial es cero



Ecuaciones

La magnitud de $\omega = v / R$ en rad/s

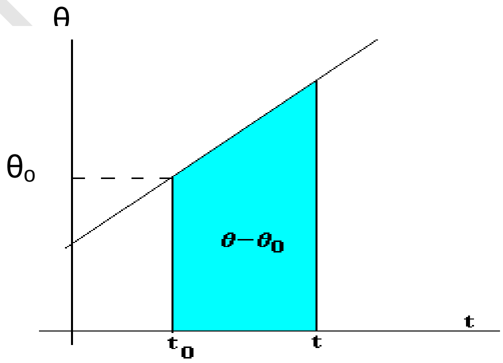
La magnitud de $a_C = v^2 / R = \omega^2 R$ en m/s^2

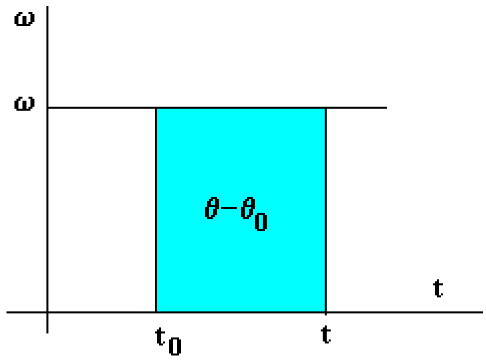
El vector velocidad $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$

El periodo $T = 2\pi / \omega$ y $\omega = 2\pi \upsilon$

El desplazamiento angular $\theta = \theta_o + \omega t$

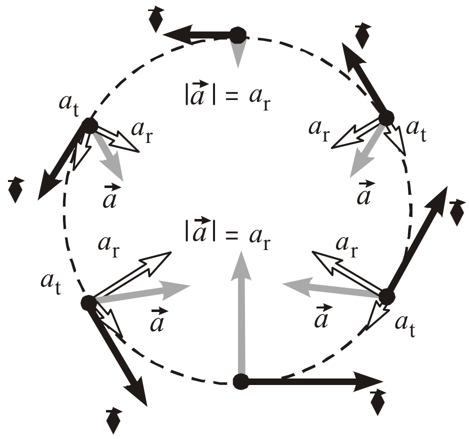
Gráficas





MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORMEMENTE ACELERADO

Consideremos ahora un móvil en una trayectoria circular en la que su velocidad cambia tanto en dirección como en magnitud, como se puede ver en la figura



La velocidad siempre es tangente a la trayectoria, Se puede observar que además de aceleración radial o centrípeta, $\mathbf{a_r}$, hay aceleración tangencial, $\mathbf{a_t}$, por lo que la aceleración total **a** hace un ángulo respecto a la trayectoria.

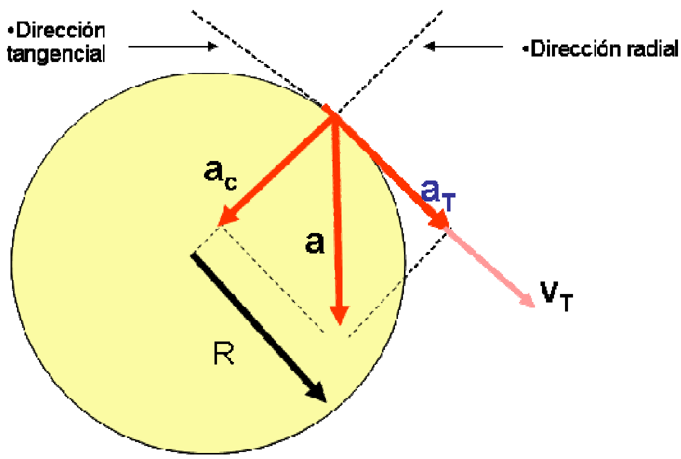
La aceleración radial (normal o centrípeta) se debe al cambio en la dirección de la velocidad v y tiene magnitud $a_c = \dfrac{v^2}{r}$ donde r es el radio de la trayectoria.

La magnitud de la aceleración radial no es constante, como en el caso de movimiento circular uniforme, pues la velocidad **V** cambia de magnitud.

La aceleración tangencial, $\mathbf{a_t}$ es originada por el cambio en la rapidez de la partícula En el **movimiento circular uniformemente acelerado** (MCUA) la $\mathbf{a_t}$ es de magnitud constante.

En la figura se observa claramente que el vector aceleración total **a** es el resultado de sumar la componente radial $\mathbf{a_c}$ y la componente tangencial $\mathbf{a_t}$**,**

$$\mathbf{a} = \mathbf{a_r} + \mathbf{a_t}$$



Las componentes $\mathbf{a_r}$ y $\mathbf{a_t}$ son vectores perpendiculares entre sí

El módulo del vector aceleración total es

$$\mathbf{a} = \sqrt{\mathbf{a_r} + \mathbf{a_t}}$$

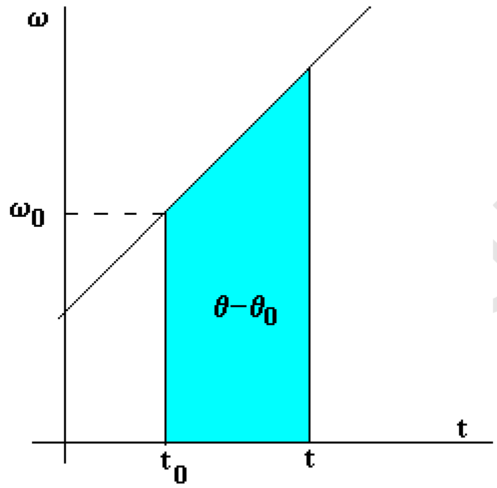
En el **movimiento circular uniformemente acelerado** (MCUA) la aceleración angular es de magnitud constante y su grafica se observa en la figura

La velocidad angular ω se relaciona con el desplazamiento angular, θ a partir de la definición

$$\boldsymbol{\omega = \omega_0 + \alpha\, t}$$

donde ω_0 es la velocidad angular inicial en el tiempo $t_0 = 0$. Cuando ω es variable en el tiempo, la velocidad angular media ω_m es la semi suma de las velocidades inicial y final en un intervalo Δt:

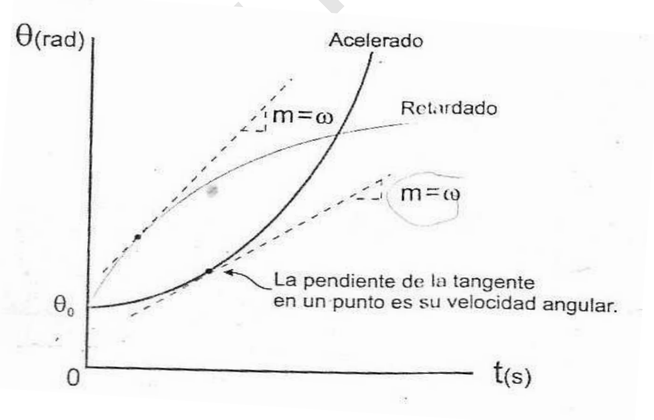
$$\omega_m = \frac{\omega + \omega_o}{2}$$



Desplazamiento angular (Δθ)

Del área bajo la curva de la velocidad angular obtenemos la expresión del desplazamiento angular θ

$$\boldsymbol{\theta = \theta_0 + \omega_0\, t + \tfrac{1}{2}\, \alpha\, t^2}$$



Eliminando t en las dos últimas ecuaciones, se llega a $\boldsymbol{\omega^2 = \omega_0^2 + 2\, \alpha\, (\theta - \theta_0)}$

Relaciones entre las cantidades angulares y lineales

El movimiento circular se describe sea con las llamadas cantidades lineales como desplazamiento s, velocidad v, aceleraciones radial y tangencial. o con las cantidades angulares definidas en los párrafos anteriores. Veremos enseguida las relaciones entre sí.

Recordemos que el arco s descrito por un móvil es : $s = r\,\theta$, la velocidad tangencial o lineal v se define

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta \theta}{\Delta t}\, r = r\,\omega$$

En ésta última expresión se observa que en el movimiento circular la velocidad tangencial depende directamente de la distancia del móvil respecto del eje de giro, dado por r. A mayor distancia r, mayor velocidad lineal.

En el movimiento circular uniformemente acelerado la aceleración tangencial esta dada por

$$a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta(r\omega)}{\Delta t} = r\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = r\alpha$$

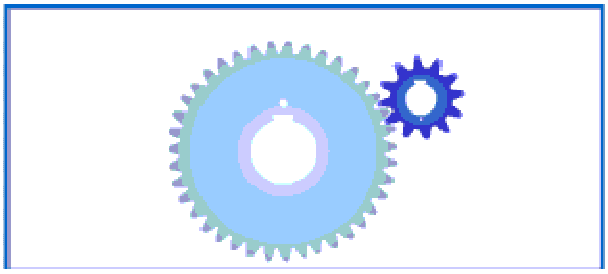
Por ultimo la aceleración radial o normal sabemos esta definida por:

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \frac{(r\omega)^2}{r} = \omega^2 r$$

Las ecuaciones usadas tanto con magnitudes lineales o angulares se muestran en la tabla

LINEAL	ANGULAR
$a = \frac{v_F - v_o}{t}$	$\alpha = \frac{\omega_F - \omega_o}{t}$
$s = \left(v_F + v_o\right)t$	$\theta = \left(\omega_F + \omega_o\right)t$

En el movimiento circular de la figura hay que considerar los siguientes casos



A) Si dos o más partículas girán en base a un mismo centro, sus velocidades angulares serán iguales.

Ejemplo 1

Una partícula se mueve en una trayectoria circular de 4m de radio y el módulo de su velocidad es v = 1 + 3t, donde t se expresa en segundos y “v” en m/s. Determine en qué instante la magnitud de la aceleración tangencial es 3/5 de la aceleración total.

Solución

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_t^2}\ , \quad a_t = \frac{3}{5}a\ , \quad a_t = 3$$

$$\frac{5}{3}a_t = \sqrt{a_t^2 + a_t^2}$$ elevando al cuadrado

$$\frac{25}{9}a_t^2 = a_t^2 + a_c^2 \quad , \quad \frac{16}{9}a_t^2 = [\frac{(1+3t)^2}{r}]^2$$

Reemplazando $a_t = 3$ y despejando

T = 1,0 s